EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

42e JAARGANG 1966/1967

VII — 1 APRIL 1967

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

MODERNISEREN — NIEUWBOUW OF VERBOUW? [1])

door

G. Krooshof

Groningen

In de jaren kort na 1945 kwam er een nieuwe damesmode. Deze heeft niet zo heel lang stand gehouden. Ze is in ieder geval nu helemaal in haar tegendeel veranderd. Nu immers hebben we de mini-jurkjes, terwijl toen plotseling overal lange rokken op straat verschenen. Je keek er eerst gek tegen aan, maar — als ik mijn vrouw mag geloven — de dames konden zich er toch niet aan onttrekken. Als iedereen in het lang liep, voelde je je ongeveer ongekleed, als je de korte kleding handhaafde. Dus ging je je ook ,,modern'' kleden.

Na deze inleiding zult u misschien begrijpen, dat ik wat tegen de woorden ,,modern'' en ,,moderniseren'' heb. Ze geven het onbehagelijke gevoel, dat je moet meedoen om niet uit de toon te vallen, terwijl je haast zeker weet, dat wat nu ,,in'' of ,,hip'' is, straks weer verworpen zal worden.

Zoeken we echter synoniemen, dan bemerken we al gauw, dat andere woorden, die we zouden willen gebruiken (bijv. vernieuwing of hervorming), ook al belast zijn met een gevoelswaarde of betekenisnuance, die we minder prettig kunnen vinden. En aangezien het woord ,,modernisering'' zelfs in de officiële naam van een staatscommissie is opgenomen, moeten we het toch maar blijven gebruiken. Het zal wel blijken, dat het niet de naam hoeft te zijn van eén modeverschijnsel, dat alle tijd en moeite, die eraan besteed wordt, niet waard zou zijn.

De woorden ,,nieuwbouw of verbouw'' in de titel van mijn verhaal, wijzen er op, dat ik als analogon voor de modernisering van het wiskunde-onderwijs heb gedacht aan de modernisering van een of ander gebouw, bijvoorbeëld een zakenpand. Soms zal een zakenman tot de ontdekking komen, dat de enige manier om zijn zaak aan te passen aan de eisen van de tijd, betekent het tot de grond toe afbreken en nieuw opbouwen van het pand. Misschien moeten zelfs de fundamenten vernieuwd worden. Een ander zal kunnen vol-

[1]) Voordracht op 4 november 1966 te Scheveningen gehouden voor L.I.W.E.N.A.G.E.L.

staan met een andere indeling van de zaak. En er zal er zelfs wel eens een zijn, die alleen naar buiten toe een moderne indruk wil maken en die daarom alleen de gevel of de etalageruimte laat vernieuwen. Om het maar eens dadelijk ronduit te zeggen: Een wiskundemethode wordt niet gemoderniseerd door de boeken een omslag met een tekening van Escher te geven en de woorden „meetkundige plaats" te vervangen door „verzameling". Deze „verbouw" moeten we duidelijk afwijzen. De vraag is echter of we overigens in Nederland tot nieuwbouw of verbouw moeten overgaan.

Nieuwbouw

In het buitenland vinden we enkele duidelijke voorbeelden van nieuwbouw. Bekend zijn de boeken van de Belgische Prof. Papy en degenen, die volgens zijn ideeën werken. We kunnen gerust zeggen, dat deze een nieuwbouw van de middelbare-schoolwiskunde betekenen. Als een Le Corbusier van het wiskundeonderwijs heeft Papy uit voorgespannen beton en glas een robuust en (althans voor ons) doorzichtig bouwwerk geschapen. Maar voor onze leerlingen zitten de vensters te hoog.

In de Verenigde Staten is in 1963 verschenen het „*Cambridge Conference Report*" met de titel *Goals for Schoolmathematics*. In het nummer van maart 1966 van *The Mathematics Teacher* wordt het door Irving Adler besproken. In dit rapport wordt zelfs aanbevolen de fundamenten te vernieuwen. Er wordt nl. in gesproken over het wiskundeonderwijs te beginnen met de kleuterschool. Het wordt dan ook wel gezien als het startsein voor de tweede revolutie in het wiskundeonderwijs. De eerste werd veroorzaakt door de eerste sputnik. Om even te laten zien hoe revolutionair de voorstellen zijn, noem ik er enkele voor de kleuterschool en de eerste jaren van de lagere school:

1. Van het begin af wordt de getallenlijn gebruikt met daarop de positieve en negatieve gehele getallen. Van het begin af betekent dus: te beginnen op de kleuterschool. Het spreekt vanzelf, dat hierbij niet is gedacht aan een wiskundige terminologie, maar dat in spelen en oefeningen telkens de getallenlijn een rol zal spelen. Aan dat spelen moet men ook steeds denken bij het noemen van de volgende onderwerpen.
2. Ongelijkheden moeten vroeg worden ingevoerd en in de lagere school moeten zulke vermenigvuldigingen als: een getal iets kleiner dan 3 maal een getal iets groter dan 5 ook een rol spelen.
3. De bewerkingen optellen en vermenigvuldigen moeten ook aan tastbaar materiaal worden geoefend en daarbij moeten de leer-

lingen de commutativiteit van deze operaties ontdekken. Mooi materiaal daarvoor zijn de gekleurde rekenstaafjes van Cuisenaire-Gattegno. Vóór ze kunnen rekenen kunnen kleuters al relaties noteren als $R + R = V$ (rood + rood = violet).

4. In spelletjes moeten Cartesische coördinaten worden ingevoerd.
5. Symmetrieën van vlakke en ruimtefiguren moeten worden ontdekt.
6. Er moeten spelletjes worden gespeeld, waarin aspecten van de verzamelingenleer een rol spelen. Voorbeelden van zulke spelen zijn te vinden in *Der Mathematik-Unterricht* 11e jaargang, nummer 4 (1965).

   Door met een grote verscheidenheid van materiaal te spelen moet de leerling allerlei wiskundige bijzonderheden van dit materiaal ontdekken.

Het rapport stelt voor de leerlingen van de klassen 3 tot en met 6 van de lagere school te laten werken met reële getallen. Ze moeten de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen van de bewerkingen optellen en vermenigvuldigen leren kennen. Ook de vlakke meetkunde en stereometrie moet in deze klassen bekeken worden. We zien o.a., als onderwerpen genoemd: poolcoördinaten, vectoren, het verschil tussen rationale en irrationale getallen, waarheidstabellen voor eenvoudige logische operaties, enz. Irving Adler zegt van dit rapport: Is het een gedetailleerd ontwerp voor een wiskundeprogramma voor de toekomst? Of is het een fantasie-ontwerp dat niet geschikt is voor leraren en leerlingen van vlees en bloed? Hij beantwoordt beide vragen ontkennend.

Het is geen programma, dat in de toekomst zo maar in de scholen kan worden ingevoerd. Het is meer een uitdaging om te experimenteren. Daarnaast is het ook niet iets, dat helemaal geen mogelijkheden heeft, want (aldus Irving Adler) kinderen kunnen meer leren dan we denken.

Het Cambridge rapport geeft een verschuiving te zien: Leerstof van de Colleges gaat naar de Highschools. Van deze scholen weer gaat er leerstof naar de lagere scholen. Is dat mogelijk? Is dat nodig?

Carl B. Allendoerfer van de universiteit van Washington zegt in zijn bespreking van het Cambridge rapport: „De opstellers zijn allen wis- en natuurkundigen verbonden aan de rijkste instituten van het land. Ze zijn ten prooi gevallen aan de illusie, dat de mogelijkheden, die ze bij hun eigen leerlingen opmerkten, bij alle andere aanwezig zouden zijn. Hun „tweede revolutie" is een revolutie „van boven af". Ik kom daar op terug.

Verbouw

Het zal u niet verwonderen, dat ik nu ik over verbouw ga praten, daarbij als voorbeeld kies, dat wat langzamerhand in ons land bekend gaat worden als „de Schotse methode". Ik bedoel de serie boeken onder de titel *„Modern Mathematics for Schools"*, uitgegeven door Blackie and Chambers, J. B. Wolters' uitgeversmaatschappij ontdekte deze boeken op de Frankfurter Buchmesse. Ze werden voorgelegd aan de leden van de commissie, die door de Drie Pedagogische Centra was ingesteld om een modern leerplan voor het h.a.v.o. op te stellen. Het bleek, dat de boeken veel overeenkomst vertoonden met wat de commissie als plannen en wensen had genoteerd.

Een der moeilijkheden, waarmee een leerplancommissie voortdurend te worstelen heeft, is dat de beknopte weergave van zo'n leerplan dikwijls zoveel interpretaties toelaat, dat de oorspronkelijke bedoeling volledig uit het oog verloren kan raken. Dr. James Zant van de Oklahoma Universiteit zegt het zo:

Men moet zich realiseren, dat wanneer men de leraar vertelt wat hij moet onderwijzen, zonder dat men hem het materiaal in handen geeft, dat hij kan gebruiken, dit meestal zonder effect blijft. Al meer dan een halve eeuw heeft men leraren verteld, wat ze eigenlijk zouden moeten onderwijzen. Er gebeurde helemaal niets. Om werkelijk het leerplan te kunnen beïnvloeden, moeten we materiaal vervaardigen, dat in de scholen gebruikt kan worden.

De commissie besefte, dat het onmogelijk zou zijn op korte termijn een goed leerboek volgens het nieuwe leerplan te doen schrijven. Een leerboek schrijven, vroeger dikwijls het werk van één of twee man, kan in de huidige situatie niet anders meer zijn dan het werk van een team.

Bovendien kan men nieuwe leerstof pas invoeren na een toetsen in de klas. Aan beide voorwaarden voldoet de Schotse methode. Een team van vier inspecteurs en 17 docenten schreef de boeken. Deze werden in een uitgave, bekostigd door het Schotse departement van onderwijs (zou zoiets in Nederland mogelijk zijn?), op 7000 leerlingen getoetst. De Nederlandse bewerking zal op ongeveer 2700 leerlingen getoetst worden.

Deze methode betekent een verbouw. Ongeveer een derde deel bijvoorbeeld van de algebra is nieuw. De rest echter wordt op een nieuwe manier, o.a. met behulp van de taal van de verzamelingenleer en van de logica benaderd. Zo worden vergelijkingen en ongelijkheden beide geïntroduceerd met behulp van het begrip „open bewering". Het is mij gebleken dat een betere terminologie een beter begrijpen mogelijk maakt.

Ook de meetkunde is grotendeels traditioneel, maar twee bijzonderheden vallen dadelijk op: het begin met ruimtefiguren en het al snel gebruik maken van coördinaten, waardoor de afbeeldingen, zoals spiegelen enz. ook een algebraïsche behandeling kunnen krijgen. Ook vectoren worden daardoor op een eenvoudige manier ingevoerd.

Een opvallend aspect van Engelse en Schotse methoden is het telkens weer verwijzen naar en gebruik maken van verschijnselen uit het leven buiten de school. Daardoor krijgen deze methoden minder het karakter van zuivere wiskunde en wordt er meer aandacht aan toegepaste wiskunde geschonken. Vandaar dat in de afdeling rekenen ook eenvoudige statistiek en waarschijnlijkheidsrekening een plaats hebben gevonden. Dit laatste hebben we in de Nederlandse bewerking van het tweede deel voorlopig weggelaten. We hebben nl. in Nederland veel minder uren dan de Schotten.

De Schotse inspecteurs hebben behalve hun administratieve taak ook een speciaal leervak onder hun hoede. De inspecteurs, die de wiskunde behartigen doen dat niet alleen in de scholen voor voortgezet onderwijs maar ook in de lagere scholen. Zodoende is er tussen lager en voortgezet onderwijs in Schotland een veel nauwer contact. Het gevolg is, dat men ook in de lagere scholen aan het onderzoeken is in hoeverre het rekenonderwijs gemoderniseerd kan worden. Dit onderzoek wordt o.a. gefinancierd door de Nuffield Foundation. Er bestaan in Nederland plannen om tot een modernisering van het rekenonderwijs te komen. Enerzijds is men o.a. in Utrecht van universitaire zijde begonnen met de bestudering van de mogelijkheden daarvan. Anderzijds is er van uitgeverszijde belangstelling voor research op dit terrein.

We krijgen in Schotland het eigenaardige verschijnsel te zien, dat de modernisering is begonnen in het voortgezet onderwijs (dus niet van boven af is geïntroduceerd) en naar beneden toe doorwerkt. Er werd ons verteld, dat het ook naar boven toe doorwerkt en dat het onderwijs aan de universiteiten is gemoderniseerd sinds dat het geval was op de High Schools en de colleges.

Waarom modernisering?

Er zijn in Nederland zeker vier motieven te noemen voor het uitvoeren van een modernisering van het wiskunde-onderwijs.

1. De invoering tengevolge van de Mammoetwet van nieuwe schooltypen heeft de noodzaak geschapen daarvoor nieuwe leerplannen te ontwerpen. Men ziet nu wel in, dat deze niet op de „klassieke" manier tot stand moeten komen, nl. door „verdunning"

van programma's van hogere schooltypen.

Vroeger kenden we het verschijnsel van het leerboek, het beknopte leerboek, het eenvoudig leerboek en het uittreksel, als achtereenvolgende uitgaven van een leerboek met „verdunningen" voor het hoogste en lagere schooltypen. Ze kwamen tot stand door schrappen en een beetje vereenvoudigen van de theorie. In alle vier uitgaven kwamen dan telkens gelijke vraagstukken voor. In het leerboek de meeste.

De leerplancommissies voor de verschillende schooltypen doen hun best de voor die typen passende leerplannen te maken. Met het oog op een horizontale doorstroming moeten ze wel gecoördineerd worden en kunnen ze dus niet al te veel uiteen lopen. Het feit, dat de Mammoetwet op korte termijn (1968) in werking moet treden, maakt een snel werken van de commissies noodzakelijk. De richtlijnen moeten nl. zo vroeg aanwezig zijn, dat eventuele auteurs er rekening mee kunnen houden, als ze een leergang voor een der schooltypes willen samenstellen. Deze noodzaak van snel werken verhindert een nieuwbouw, die gebaseerd is op voldoende experimenten. Hoewel het mooi geweest zou zijn als in 1968 met totaal vernieuwde programma's gestart kon worden, in een onderwijssituatie, waarin nog zo weinig eenstemmigheid bestaat over allerlei aspecten van de modernisering is dit totaal onmogelijk. Dus gaan de leerplancommissies uit van een matige verbouw.

2. De andere motieven voor de modernisering zijn internationaal. Eén daarvan is de veranderde plaats, die de wiskunde in de maatschappij heeft gekregen. Het zal u allen bekend zijn, dat de eerste revolutie in het wiskundeonderwijs pas goed doorbrak in de Verenigde Staten toen de eerste Russische Sputnik zijn rondjes om de aarde ging draaien. Maar het is niet alleen de ruimtevaart, die een toegenomen wiskundegebruik heeft veroorzaakt. In de industrie, de handel, de wetenschap is een voortdurend toegenomen gebruik van de wiskunde. Denk maar aan het steeds meer toepassen van de lineaire programmering, de optimaliseringsproblemen en het gebruik van de computer. [1]) Men is wel eens bang voor de vertechnisering van de maatschappij of voor de overheersing door de computer. Dit gevaar bestaat echter alleen dan, wanneer er slechts enkelingen zijn, die met deze rekentuigen kunnen omgaan. Wanneer in het algemeen begrepen wordt, hoe deze „deskundigen" denken en werken, hoe er geprogrammeerd wordt, hoe problemen

---

[1]) Op dit moment zijn zeker tweemaal zo veel computers in bestelling dan al in gebruik zijn.

in computertaal vertaald moeten worden, dan verdwijnt in de eerste plaats de angst voor de geheimzinnige apparaten, die toch in wezen afhankelijk zijn van ons begrijpen. En verder bestaat er dan een kleinere kans op een overheersing van de maatschappij door de deskundigen, die alles voor ons, maar zonder onze inspraak beslissen. In de programma's, die door onze leerplancommissies ontworpen worden is nog niets te vinden betreffende het leren programmeren. Waarschijnlijk kunnen we dat pas in de school introduceren, wanneer de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde ook cursussen voor leraren heeft ontworpen in het programmeren, bijvoorbeeld het opstellen van stroomdiagrammen. Men zal onmogelijk in de toekomst deze kant van het wiskundeonderwijs buiten de scholen kunnen houden. Maar wanneer men zou proberen dit in een bestaand programma in te bouwen, zou al gauw het gevaar van de overlading dreigen. Hier moet over gedacht worden door hen, die een volledige nieuwbouw willen en kunnen ontwerpen.

3. Een derde motief voor de modernisering van het wiskunde-onderwijs vinden we in de veranderde denkwereld van de wiskundigen. Sinds N. Bourbaki kunnen we deze verandering wel aanduiden met de trefwoorden abstraheren, algebraïseren, struktureren, axiomatiseren. De verandering van denkwereld ging gepaard met een verandering van de taal. De begrippen verzameling, relatie en afbeelding spelen in die nieuwe taal een grote rol.

Ik krijg de indruk, dat de Bourbakisten ernaar streven vooral de axiomatisering al zeer vroeg in het onderwijs te doen plaatsvinden. In Duitsland vinden en vonden daarover uitgebreide discussies plaats. Mannen als H. G. Steiner, D. Laugwitz, en de helaas te jong overleden Alexander Wittenberg hebben hun stem in deze discussies doen horen. Laugwitz schreef een artikel onder de sprekende titel: „*Der Streit um die Methode in der modernen Mathematik*".

4. We komen daardoor vanzelf tot het vierde motief voor een modernisering van het wiskunde-onderwijs, nl. een vernieuwing van de didaktiek. Wie hedendaagse wiskundeboeken bekijkt, krijgt wel eens sterk de indruk, dat men bij het schrijven meer gedacht heeft aan moderne wiskunde in het onderwijs, dan aan onderwijs in de moderne wiskunde. Dat is wel begrijpelijk. Het was voor de wiskundigen zelf een verrassende en fascinerende beleving de nieuwe wijze van denken en werken te ontdekken. Geen wonder, dat ze die wilden doorgeven in de scholen. Dit enthousiasme merken we vooral op in de door Prof. Papy beïnvloede Belgische boeken.

Ook de Schotse boeken zijn in sommige opzichten door Papy beïnvloed. Maar de Schotten hebben veel meer dan de Belgen nagedacht over de didaktiek van het vak, waardoor bij hen een heel ander soort boek uit de bus gekomen is. Er zijn enkele moderne wiskundeboeken, die me doen denken aan de eerste auto's, die als rijtuigen waren gebouwd. Dat de auto een geheel eigen vormgeving eist, werd pas ontdekt toen men over de eerste verrassing van het kunnen rijden zonder paarden heen was.

In het vraagstuk van de modernisering van het wiskunde-onderwijs is de vraag naar de nieuwe didaktiek het allerbelangrijkst. We hebben te maken met nieuwe leerstof, maar niet minder met „nieuwe" leerlingen. Tot mijn verbazing bemerk ik zo nu en dan, dat er nog steeds leraren zijn voor wie de enige wiskundedidaktiek bestaat in de in *elke* les terugkerende cyclus: les overhoren, sommen op het bord laten schrijven, volgende paragraaf bespreken, deze als huiswerk opgeven voor de volgende keer, de volgende vraagstukken opgeven.

Deze didaktiek, die wel de oorzaak is geweest van heel wat minderwaardigheidsgevoelens en de gedachte, dat je voor wiskunde een „knobbel" diende te bezitten, stamt uit de tijd toen de wiskunde nog een precies omschreven cultuurgoed was (bijvoorbeeld de meetkunde van Euclides) met een door de traditie voorgeschreven denk- en werkpatroon. Ze paste in de tijd, toen de leerlingen gewend waren op gezag te aanvaarden, wat de leraar doceerde, toen colleges op de universiteit voorlezingen waren, toen kennis macht was en geleerdheid een statussymbool. Onderwijsdoel was toen de „geleerde" leerling, nl. de leerling, aan wie wat geleerd was.

Kijken we naar de didaktiek, dan moeten we zeggen, dat we met de modernisering van het wiskunde-onderwijs nog maar aan het begin staan. Men kan zich afvragen, hoe het komt, dat zo weinig docenten echte belangstelling hebben voor de didaktiek, terwijl toch hun dagelijks werk hen telkens met didaktische vragen confronteert. Er zijn daarvoor m.i. twee redenen. De eerste is, dat de meeste wiskundedocenten zich beschouwen als vakdocent met de klemtoon op vak. Ook in deze tijd wordt dat ongewild in de hand gewerkt door de Commissie Modernisering Leerplan, die wel cursussen heeft uitgeschreven in de nieuwere onderdelen van het vak, maar daarnaast geen cursussen heeft georganiseerd ter vernieuwing van de didaktiek.

De tweede reden is, dat de didaktiek slechts wordt beschouwd als een onderdeel van de pedagogiek of psychologie en niet een eigen gezicht heeft. De leraren beschouwen zich in het algemeen

niet als pedagogen. Wil de didaktiek de belangstelling krijgen, die ze nodig heeft, dan moet het een eigen wetenschappelijke discipline worden, bijvoorbeeld de wetenschap van de relaties tussen leerlingen, docent en leerstof in de lessituatie. Dr. De Miranda zal in het tijdschrift *Vernieuwing* (Muusses) een artikel schrijven over de identiteit van de didaktiek. Het eerste deel daarvan kan men vinden in het nummer van oktober 1966. Hierin bespreekt hij o.a. de moeilijkheden die ontstaan, doordat de leraar de leerstof op een andere manier kent dan de leerling. Het verschil in het bedoelen en het verstaan van de in de les door beiden gebruikte taal is oorzaak van veel misverstaan. Dit is een der problemen van echt didaktische aard, die door elke docent gezien moeten worden.

Ik noem u nu een aantal vraagpunten, die door didaktici onderzocht zullen moeten worden. De lijst zal verre van volledig zijn, maar zal een beeld geven, van wat moderne didaktiek zal moeten zijn.

De eerste vraag zal moeten zijn, welk doel in elke les en in de gehele cursus wordt nagestreefd. Dat zal dus niet moeten zijn de „geleerde" leerling. De universiteit en de hogere beroepsopleidingen moeten niet in de eerste plaats eisen, dat er een arsenaal van kennis wordt „aangebracht". Het werkwoord aanbrengen karakteriseert duidelijk de niet meer gewenste didaktiek. Het aanbrengen veronderstelt doceren, veronderstelt een ingrijpen in het geestelijk leven van de leerling. Vandaar, dat ik ook niet gesproken heb van de didaktiek als leer van het onderwijzen, maar als de wetenschap van de *relaties* tussen leerling, leraar en leerstof (en eventueel het leerboek). We moeten bijvoorbeeld als didaktisch doel stellen de leerling, die voorbereid is voor het hoger beroepsonderwijs of voor de universiteit. Dat betekent onder meer, dat hij in staat is (en genegen is) te mathematiseren (een probleem in de taal van de wiskunde te vertalen), dat hij weet het probleem te plaatsen in de juiste struktuur, dat hij de taal van de wiskunde daarbij kan hanteren. Het spreekt vanzelf, dat dit niet gaat zonder dat de leerling een zekere hoeveelheid vaardigheden heeft verworven. Onderzocht moet worden hoe groot het minimum aantal vereiste vaardigheden is. Meer dan naar de leerling, die wat kent, zullen we moeten streven naar de leerling, die een wiskundige „attitude" heeft verworven. De taak van de docent, die niet langer in de eerste plaats doceren zal, wordt daardoor een geheel andere. Het zal de taak van de didaktici zijn de docenten bij deze andere taak te helpen. Er zijn voor deze didaktici nog een groot aantal vragen betreffende de relaties tussen de elementen van het viertal leerlingen – leraar –

leerstof – leerboek te beantwoorden. Ik noem er enkele:

1. Hoe komt een gespreksgemeenschap tussen de leerlingen onderling tot stand? Welke rol kan de docent daarbij spelen? Welke opdrachten in het leerboek kunnen een discussie aan de gang brengen? Is het mogelijk de leerlingen in teamwork opdrachten te laten uitvoeren?
2. Hoe vindt de wisselwerking tussen leerlingen en docent plaats? Is het mogelijk, dat de docent met de leerling discussieert in diens eigen taal? Hoe moet het spreken in de taal van de wiskunde in zo'n discussie tot stand komen? Welke rol speelt de docent bij het gebruiken van geprogrammeerde instructie of van een computer? Op welke manieren kan de docent zich op de hoogte stellen van het vorderen van de leerling?
3. Hoe moet in het algemeen het toetsen van de leerlingen plaatsvinden? Is het steeds mogelijk dat te doen via van te voren geijkte objectieve toetsingsmiddelen? Of moet het plaatsvinden met behulp van door de docent voor elke individuele leerling ontworpen toetsmiddelen? Hoe kan er door het toetsen een feedback tot stand komen?
   Hoe moet een eindexamen plaats vinden? Kan ook daarbij rekening worden gehouden met een individuele ontwikkeling van de leerling? (Stel bijvoorbeeld, dat leerling en docent gewerkt hebben aan een projekt, dat „exemplarisch" is in de zin, die Martin Wagenschein daaraan gegeven heeft).
4. Op welke wijze moet een intuïtieve inleiding plaats vinden? Welke opdrachten moeten er dienen tot het voorbereidende denken en onderzoeken bij elk der opdrachten? Wat is in didaktisch opzicht elementaire wiskunde?
5. Op welke wijze kan differentiatie tussen groepen leerlingen op verschillend niveau tot stand komen? Of moet het gehele leerproces een individueel karakter dragen? Hoe kan men leerboeken ontwerpen, die een individueel werken mogelijk maken? Moet dat via geprogrammeerde inhoud tot stand komen? Of moet het „confectieleerboek" plaats maken voor meer individualiserende hulpmiddelen, zoals kaarten of kleine boekjes met beperkte opdrachten? („Teaching-packages").
6. Hoe moet een leerboek tot stand komen? Is het voldoende daarbij gebruik te maken van de ervaring van een of meer auteurs? Of moeten deze de beschikking kunnen krijgen over internationaal verworven ervaringsmateriaal?
   Leerzaam zijn de ervaringen van auteurs van geprogrammeerde boeken. Zie het tijdschrift *G. I.* (Uitg. Samsom, Alphen a/d Rijn).

Deze lijst van vragen kan natuurlijk nog uitgebreid worden. Het zal duidelijk zijn, dat zolang men deze vragen niet op redelijke manier beantwoord heeft, er van verantwoorde nieuwbouw geen sprake kan zijn. Vooralsnog zullen we ons dus met verbouw moeten tevredenstellen. Maar het is gewenst, dat zij die nu de programma's en de leerboeken en het studiemateriaal maken, daarbij rekening houden met de noodzaak van nieuwbouw over een niet al te lange tijd. De regering moge dan daarbij overwegen, dat research in het onderwijs even broodnodig is als in de industrie. Misschien zelfs wel de voorrang moet hebben. Wanneer men de ontwikkelingen in de techniek en in het gebruik van de wiskunde in allerlei maatschappelijke en wetenschappelijke instanties ziet en zich afvraagt, hoe de leerling van nu zich daarbij over enkele jaren zal kunnen handhaven, dan blijkt het dat de tijd dringt om tot nieuwbouw te komen. De mens van de eenentwintigste eeuw is bezig zich in onze scholen te ontwikkelen. Dat zal een eeuw zijn met andere intermenselijke relaties, met andere verhoudingen tussen mens en industrie, mens en wetenschap, mens en kunst, kortom met een andere cultuur. Het zal een eeuw zijn met andere denkvormen, met een andere werkverdeling voor de mens, met een andere vrijetijdsbesteding. De eerste verschijnselen van de spanningen van die tijd doen zich voor in de wereld van de jeugd van nu. Het onderwijssysteem, dat eeuwen goed bleek te functioneren, omdat het tenslotte voor een elitegroep uit de jeugd was bestemd, zal in de eenentwintigste eeuw volkomen verouderd zijn. Wie nu aan het verbouwen is en straks zal moeten nieuwbouwen moet de gehele maatschappelijke en industriële en geestelijke ontwikkeling van de mens van nu tot de mens van dan in het oog vatten. Zo gezien is deze verbouw en nieuwbouw een niet geringe taak, die alleen maar door samenwerking verricht kan worden. Een wijze regering stelt didaktici in en buiten het onderwijs in staat om tot deze samenwerking te komen. Er moeten daarvoor gelden beschikbaar worden gesteld. Er moeten mensen worden vrijgemaakt. Een uitgever zei tegen me: momenteel worden de leerboeken vervaardigd in de late uren na het volbrengen van de dagtaak. Ze moesten in de morgenuren gemaakt kunnen worden. Zonder een hulp, zoals de Schotse regering gegeven heeft aan het team, dat de Schotse methode samenstelde, zal het niet mogelijk zijn om tot nieuwbouw te komen. Maar die *moet* er komen.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. Bottema

Delft

LXVII. *Frans van Schooten aan Christiaan Huygens.*

De *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens* zijn geen geschriften om in één adem uit te lezen en elk der tweeëntwintig quarto delen is reeds om fysieke redenen ongeschikt als *livre de chevet.* Wie de prachtige editie ter hand neemt, beseft dat deze duizenden bladzijden door weinigen in hun volle omvang zullen zijn gelezen. Zelfs de exemplaren uit de openbare bibliotheken zijn thans nog, meer dan zeventig jaren na het begin der uitgave, in een staat die waard is om *als nieuw* te worden aangeprezen. Toch zal wel niemand, nog afziende van de betekenis der uitgave als typografisch werkstuk, haar reële behoefte willen afwegen tegen de onmetelijke zorg en aandacht waarmee zij in een reeks van jaren door een uiteraard wisselende groep van eminente mathematici en historici tot stand is gebracht. Veeleer wekt zij een met nationale trots gemengde emotionele voldoening en het besef dat op een edele wijze vorm is gegeven aan bewondering en eerbied voor een der grote figuren uit de geschiedenis van de wiskunde en de wetenschap der natuur.

De eerste tien delen van de editie bevatten de uitgebreide correspondentie van Christiaan Huygens met zijn verwanten, vrienden en relaties. Dat na enige eeuwen publikatie in deze omvang mogelijk bleek, danken wij mede aan een — blijkbaar de familie inherente — karaktertrek, die er tegenop ziet een schriftuur, zij het ook een *petit billet* van voorbijgaande zin, weg te doen. De redacteuren der uitgave hebben hun grenzen ruim getrokken en ook brieven opgenomen, die met Christiaan zelf slechts zijdelings in verband staan. Ook hebben de oudere brieven dikwijls betrekking op algemeen menselijke, belangrijke of onbelangrijke aangelegenheden, wat hen boeiend doet zijn als *documents humains.* Als twee jongens Huygens, Christiaan en zijn jongere broer Lodewijk, school gaan op de Academie in Breda, is er een briefwisseling tussen de directeur, bij wie zij in huis zijn, en vader Constantijn, de dichter en staatsman. De berichten vooral over Christiaan zijn veelbelovend:

„Votre fils qui est logé chez nous me donne une grande satisfaction, soit pour la diligence qu'il apporte à ses études, soit pour l'honnêteté de ses comportements" en hij vervolgt met een door de tijd ingeloste belofte: „Sans vous flatter, Monsieur, je le regarde comme un nouvel Orient, qui ne tardera pas à envoyer ses lumières par tout" (24 juni 1647). Een heel andere toon heeft een briefje van de oudste broer, Constantijn junior, van den Haag uit aan Christiaan, hem broederlijk bezwerend toch gauw naar huis te schrijven: vader blijkt het qualyck te nemen „dat geen van je beiden eens een woord en schrijft". „Daarom moet je je tot beterschap stellen of hij sou heel quaet worden" (19 juni 1648). De situatie is ten duidelijkste van alle tijden.

In de Bredase periode heeft Christiaan reeds een intensieve correspondentie met Mersenne te Parijs en met van Schooten, de hoogleraar onder wie hij te Leiden had gestudeerd. Men zendt elkaar vraagstukken en oplossingen van allerlei aard, die voor de scholing van de negentienjarige jongeman van betekenis zullen zijn geweest. Wij nemen er hier op goed geluk een voorbeeld uit om een indruk te geven van aard en niveau.

Op 20 juni 1648 zendt van Schooten aan Christiaan een uitgave van Archimedes, die hij op een actie te Haarlem (voor zeven gulden en vijf stuivers) heeft gekocht, „die heel wel geconditioneert is" en die hij aan hem over doet. „Vorders sende ick VE hier 3 problemata, die mij onlangs sonder solutie van Parijs sijn toegesonden, dewelcke mijns bedunkens niet swaer en sijn". Hij heeft ze zelf niet opgelost, omdat de tijd daarvoor ontbrak (aan welke opmerking men zekere bijgedachten kan verbinden). UEdele zal ze gemakkelijk vinden, meent hij, gij hebt wel veel zwaardere gesolueert.

Wij beperken ons tot het eerste probleem, evenals de beide andere een constructieopgave uit de planimetrie, en luidende als volgt. Gegeven is (fig. 1) de driehoek ABC met op AB het punt D en op AC het punt E. Gevraagd op BC het punt F zodanig dat $\angle BDF = \angle FEC$.

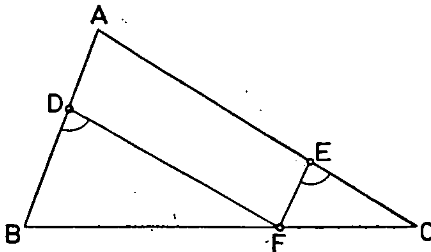


Fig. 1.

Wij voegen er dadelijk aan toe, dat in de verdere uitgegeven correspondentie, voor zover wij zien, door geen der partijen op de vraagstukken is teruggekomen, zodat onzeker blijft of en zo ja hoe de vrienden het probleem hebben gesolueert.

Beweegt een punt P van B naar C dan neemt de hoek BDP monotoon toe van nul tot $\angle BDC$ en hoek PEC neemt monotoon af van $\angle BEC$ tot nul, waaruit blijkt dat er steeds één oplossing is.

Wij kunnen door D de rechte DS en door E de rechte ES trekken zó dat $\angle BDS = \angle CES (= \varphi)$. Dan ontstaan met D en E tot toppen twee congruente waaiers en omdat wij het intussen in de projectieve meetkunde zo heerlijk ver gebracht hebben, weten wij dat de meetkundige plaats van S een kegelsnede h is. De snijpunten daarvan met de rechte BC kunnen volgens bekende constructies met passer en lineaal bepaald worden. Blijkbaar zijn zij reëel en ligt één ervan tussen B en C. Het probleem is daarmee in beginsel opgelost en het heeft een elementair karakter. Wat de genoemde kegelsnede betreft: zij gaat uiteraard door D en E, en ook door A ($\varphi = 0$). Is α de tophoek van de driehoek, dan zijn voor $\varphi = \alpha/2$ en ook voor $\varphi = (\pi - \alpha)/2$ de toegevoegde rechten door D en E evenwijdig. Daaruit volgt dat h een orthogonale hyperbool is met als asymptotische richtingen die van de binnen- en buitenbissectrice van A. Zijn voorts $\varphi = \varphi_1$ en $\varphi = \alpha - \varphi_1$ twee waarden van φ waarbij de punten S en S' van h behoren, dan is $DS // ES'$ en $DS' // ES$, waaruit volgt dat S en S' elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v.

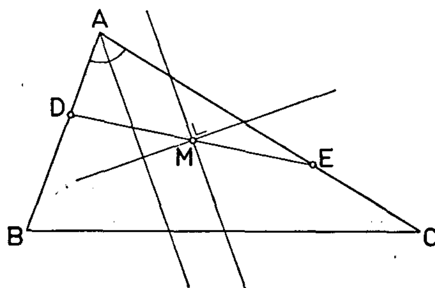


Fig. 2.

het midden M van DE. Het middelpunt van h is dus M en de asymptoten van h zijn de rechten door M evenwijdig met de bissectrices van A (fig. 2). Het verloop van h is daarmee wel volledig bepaald en het is duidelijk dat een van de takken (in de figuur die door E) een punt tussen B en C bevat. Met projectief-meetkundige beschouwingen is het vraagstuk dus eenvoudig op te lossen.

Wie een analytische oplossing wenst zou de oorsprong van zijn assenstelsel in A kunnen leggen en de X- en Y-as langs de binnen- en buitenbissectrice. Wij stellen $BD = p$, $DA = c - p = p_1$, $CE = q$, $EA = b - q = q_1$. Als vergelijking van h vindt men dan

$$2xy + (p_1 - q_1)\sin\frac{\alpha}{2}\cdot x - (p_1 + q_1)\cos\frac{\alpha}{2}\cdot y = 0 \qquad (1)$$

Een parametervergelijking van BC is

$$x = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\lambda b + \mu c}{\lambda + \mu},\ y = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\lambda b - \mu c}{\lambda + \mu} \qquad (2)$$

zodat de snijpunten van h en BC bepaald worden uit

$$bq\lambda^2 + (cp_1 - bq_1)\lambda\mu - cp\mu^2 = 0 \qquad (3)$$

waarvoor de wortels voor positieve p, p_1, q en q_1 reëel zijn en van tegengesteld teken. Eén snijpunt ligt dus inderdaad tussen B en C. Van het andere is de betekenis ook duidelijk. Men krijgt fig. 3 met de daarin aangegeven gelijke hoeken. De beide snijpunten kunnen met behulp van (3) met lineaal en passer worden geconstrueerd.

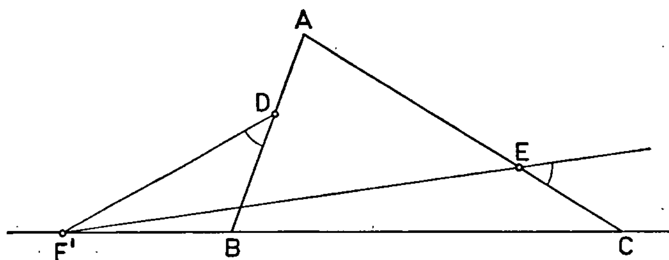


Fig. 3.

Men kan het vraagstuk uitbreiden tot gevallen waarbij D en/of E op de verlengden der zijden liggen, maar de oplossing is dan niet altijd reëel.

Bijzondere gevallen zijn o.a.: 1) $DA = EA$; h is ontaard in de rechte DE en de binnenbissectrice, het uiteinde van de laatste is het gevraagde punt; 2) DE is antiparallel met BC, $cp_1 = bq_1$, de twee snijpunten liggen harmonisch met B en C; 3) $AB = AC$; men heeft $BF : FC = p : q$, het tweede snijpunt ligt in het oneindige.

Men kan ook elke introductie van de hyperbool weglaten en het vraagstuk met trigonometrie oplossen. Is in fig. 1

$\angle BDF = \angle FEC = \vartheta$, dan is

$$BF = \frac{p \sin \vartheta}{\sin(\beta + \vartheta)}, \quad FC = \frac{q \sin \vartheta}{\sin(\gamma + \vartheta)},$$

zodat voor ϑ wordt gevonden de vergelijking

$$p \sin \vartheta \cdot \sin(\gamma + \vartheta) + q \sin \vartheta \cdot \sin(\beta + \vartheta) - a \sin(\beta + \vartheta) \cdot \sin(\gamma + \vartheta) = 0 \qquad (4)$$

of wel

$$p \cos(\gamma + 2\vartheta) - p \cos \gamma + q \cos(\beta + 2\vartheta) - q \cos \beta - a \cos(\beta + \gamma + 2\vartheta) + a \cos(\beta - \gamma) = 0. \qquad (5)$$

Zij is van het elementair oplosbare type:

$$P_1 \cos 2\vartheta + P_2 \sin 2\vartheta + P_3 = 0 \qquad (6)$$

maar de discussie over de realiteit van de wortels is bewerkelijker.

Hoe Huygens het probleem zou hebben behandeld, kunnen wij slechts gissen. Over onze trigonometrie zal hij niet hebben beschikt en nog minder over projectieve meetkunde. Maar in de leer der kegelsneden was hij uitnemend thuis. Reeds voor hij naar Leiden ging had hij in 1645 private lessen gehad van de landmeter J. J. Stampioen de jongere, die daarvoor een programma had ontworpen. Daarin heet het „om op de hoogsten trap der Wisconst te comen, so sijn inde snijdinge vande Conus, namentlijck inden Elipsis, parabole, ende hiperbole, de alder subtylste wetenschappen verborgen, die imant hier op de werelt sou kunnen bedencken". Appollonius wordt dan ook op de boekenlijst gezet, evenals trouwens voor de kennis der optica, „het bouck van de Cartes". In de arithmetica valt niet veel meer te doen, meent de mentor, „ten sij dat de sinnelijckheidt streckte tot den Algebra". Wij weten dat de sinnelijckheidt van Christiaan zich later nog heel wat verder heeft uitgestrekt. Bij zijn onderzoekingen ging hij op geniale wijze eigen wegen en tegenover de methode van Descartes en later de infinitesimaalrekening van Leibniz stond hij min of meer afwerend. Ook in dit opzicht schijnt hij zijn leermeester te volgen, die het leerprogramma afsluit met het algemene en na drie eeuwen nog actuele advies: „ook *selfs* daer noch wat bij te practiseeren tot het gene dat men gelesen heeft, vordert veel meer, als altijt ende geduerich (sonder eijgen practijck) in de boucken te suffen".

EEN EXPERIMENT IN VI^B

Ter oriëntatie het volgende. Sinds 1961 informeer ik in VI^B of er belangstelling bestaat voor het volgen van een extra uur wiskunde waarin „capita selecta" worden behandeld.

Gewoonlijk reageren ongeveer 12 à 15 van de 25—31 leerlingen gunstig. Zo tegen Kerstmis blijft er dan nog een 5—7 tal enthousiast over. Behandeld worden: Permutaties, determinanten (beperkt tot orde 3, regel van Cramer, het produkt van twee determinanten), groepen van eindige orde, lineaire transformaties in R_2.

Bij uitstek goede leerlingen prepareren aan de hand van een aan hen verstrekt boekje elk een tweetal lessen over vectoralgebra, leer van de verzamelingen en het getal e.

Na elke les worden enkele eenvoudige opgaven meegegeven, die de daarop volgende les worden besproken. Proefwerk wordt met het oog op het eindexamen niet gegeven. Alleen bij een uitzonderlijk goed schriftelijk wordt de kandidaat de keuze gelaten om zijn mondeling te laten bestaan uit een bespreking van de behandelde stof.

De resultaten hiervan zijn voor mij een stimulans hiermee door te gaan. Bij de lezing van bijgaand artikel bedenke men dus, dat een „som" en een „produkt" voor hen reeds gegeneraliseerde operaties zijn. Ze komen die tegen bij de vectoralgebra (scalair produkt, „dot" produkt, „cross" produkt, „box" produkt) en in de groepentheorie.

Aan het hoofdstuk „Lineaire transformaties" worden ongeveer 5 à 7 lesuren besteed.

Wassenaar 5-1-66

dr. W. Burgers

LINEAIRE TRANSFORMATIES

We beschouwen het XOY-vlak en de transformatie T:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + 4y \\ \bar{y} = x + y \end{cases}$$

Door deze transformatie T zal het punt $P(2; 3)$ afgebeeld worden in het punt $P'(14; 5)$

Kortweg: $T(P) = P'$.

Het is duidelijk, dat T bepaald is door het schema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dat we de *matrix* [1]) van de transformatie noemen. Deze matrix past bij de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Transformaties waarvan de determinant niet 0 is, noemen we *regulier*, andere *singulier*.

Zo is dus $\begin{cases} \bar{x} = 2x + y \\ \bar{y} = 4x + 2y \end{cases}$, met matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

singulier. Door deze transformatie wordt het platte vlak afgebeeld op de *rechte* $y = 2x$. We komen hierop nog terug.
Een reguliere transformatie is een één-éénduidige afbeelding van het vlak op zichzelf. (Ook wel een permutatie van XOY).

Passen we $T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ toe op $P(2; 3)$ dan ontstaat $P'(14; 5)$.
Een hernieuwde toepassing geeft $P''(34; 19)$.
We noteren: $TT(P) = P''$ of $T^2(P) = P''$.

De matrix $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ voert $P(2; 3)$ ineens over in $P''(34; 19)$.

Zou $T^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$?

Passen we na $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nog de transformatie $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ toe, dan geldt $T_2T_1(P) = (24; 34)$.

Dit gebeurt ineens door $T_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Er dienen zich dus twee problemen aan:

1°) het onderzoek van de transformatie zelf,
2°) de vraag of we de berekeningen met de matrices zelf kunnen definiëren, of anders gezegd of we een algebraïsche structuur kunnen ontwerpen, waarbij de matrices de elementen zijn.

Een punt (vector) is gedefinieerd als een geordend getallenpaar.
We spreken af:

$$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \quad \text{en} \quad k(x_1; y_1) = (kx_1; ky_1)$$

---

[1]) Een zg. vierkante matrix.

(denk aan de som van twee vectoren met beginpunt (0; 0) en aan de „uitrekking'' van een vector).
Met behulp van deze twee afspraken willen we nu de betekenis vastleggen van: $T_1 + T_2$, kT_1 en van T_1T_2. (k is een reëel getal)

$$T_1(x; y) + T_2(x; y) = (x'; y') = T_3(x; y)$$

waarbij we dan $T_1 + T_2$ gelijk aan T_3 stellen.

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$$
$$T_1(x; y) = (a_1x+a_2y; b_1x+b_2y)$$
$$T_2(x; y) = (A_1x+A_2y; B_1x+B_2y)$$
$$T_1(x; y)+T_2(x; y) = (\overline{a_1 + A_1}x+\overline{a_2 + A_2}y; \overline{b_1 + B_1}x + \overline{b_2 + B_2}y$$

zodat het dus voor de hand ligt af te spreken:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + A_1 & a_2 + A_2 \\ b_1 + B_1 & b_2 + B_2 \end{pmatrix}.$$

Blijkbaar is deze „optelling'' *commutatief*:

$$T_1 + T_2 = T_2 + T_1.$$

op soortgelijke wijze komen we dan tot

$$kT(x; y) = T(kx; ky)$$

zodat

$$k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 \\ kb_1 & kb_2 \end{pmatrix}$$

Natuurlijk geldt: $k(T_1 + T_2) = kT_1 + kT_2$ terwijl we zonder moeite in $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de *nulmatrix O* herkennen.

$$A + O = O + A = A,$$
$$A + B = B + A,$$
$$k(A + B) = kA + kB.$$

Nu nog het „produkt'' van twee matrices.

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$$
$$T_1(x; y) = (a_1x + a_2y; b_1x + b_2y),$$
$$T_2T_1(x; y) = T_2(a_1x + a_2y; b_1x + b_2y)$$
$$= (A_1\overline{a_1x + a_2y} + A_2\overline{b_1x + b_2y}; B_1\overline{a_1x + a_2y} + B_2\overline{b_1x + b_2y})$$
$$= (\overline{A_1a_1 + A_2b_1}x + \overline{A_1a_2 + A_2b_2}y; \overline{B_1a_1 + B_2b_1}x + \overline{B_1a_2 + B_2b_2}y)$$

zodat:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_1a_1 + A_2b_1 & A_1a_2 + A_2b_2 \\ B_1a_1 + B_2b_1 & B_1a_2 + B_2b_2 \end{pmatrix}.$$

Ter vereenvoudiging schrijven we $(x; y) \cdot (p; q) = xp + yq$ en we herkennen hierin het inwendig produkt van twee vectoren, dat commutatief is.

Dan geldt dus:

$\times$	$\begin{pmatrix} a_1 & \downarrow & a_2 \\ b_1 & & b_2 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ B_1 & & B_2 \end{pmatrix}$	$(A_1; A_2) \cdot (a_1; b_1)$	$(A_1; A_2) \cdot (a_2; b_2)$
	$(B_1; B_2) \cdot (a_1; b_1)$	$(B_1; B_2) \cdot (a_2; b_2)$

We zien wel in, dat twee matrices *gelijk* zijn, als ze identiek zijn en dat het produkt van twee matrices i.h.a. *niet* commutatief is.

De *eenheidsmatrix* I is natuurlijk $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

zodat $M \times I = I \times M = M$ en $k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

Dit zijn z.g. *scalaire* matrices, waarvan het produkt wel commutatief is. Er is blijkbaar een isomorfie tussen de reële getallen en de matrices van de vorm $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

$$2 \times 3 = 3 \times 2 = 6; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nu nog de *inverse* van een matrix.

Zij $T = \begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix}$ dan geldt dus: $\begin{cases} \bar{x} = ax + by \\ \bar{y} = px + qy. \end{cases}$

Willen we hieruit x en y oplossen en uitdrukken in $\bar{x}$ en $\bar{y}$, dan moet de determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0$ zijn, d.w.z. de matrix moet regulier zijn.

Men vindt: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} \bar{x} & b \\ \bar{y} & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}$ en $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & \bar{x} \\ p & \bar{y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}$.

Ter verkorting schrijven we $\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = \Delta_T$ dan geldt:

$$\begin{cases} \Delta_T x = q\bar{x} - b\bar{y} \\ \Delta_T y = -p\bar{x} + a\bar{y} \end{cases}$$

zodat T^{-1}, de inverse van T, gelijk is aan $\frac{1}{\Delta_T}\begin{pmatrix} q & -b \\ -p & a \end{pmatrix}$

Samengevat:

$$A \times B \neq B \times A$$
$$A \times I = I \times A = A$$
$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

A^{-1} bestaat als A regulier is.

Men controlere: $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

zodat de vermenigvuldiging ook *associatief* [1]) is.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$i \times i = i^2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zodat een produkt nul kan zijn zonder dat een factor nul is.
Indien we deze vermenigvuldiging willen generaliseren ook voor niet-vierkante matrices, dan moet het aantal kolommen van de linkerfactor van het produkt, gelijk zijn aan het aantal rijen van de rechterfactor.

Indien we een punt voorstellen door een matrix van één kolom, dan geldt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \text{ want}$$

	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} ax + by \\ cx + dy \end{matrix}$

[1]) De reguliere matrices vormen dus een multiplicatieve groep, die niet-abels is. De matrices met determinant 1 vormen een ondergroep.

Men ziet dan ook:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$$
$$T^{-1}T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$$

Constateer dat: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ zinloos is en dat

$$(x \quad y)\begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}^{1)} = (ax + by;\, cx + dy) = (\bar{x};\, \bar{y}).$$

Keren we nu terug naar de transformatie $T = \begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{pmatrix}$, dan zal $T(x;\, y) = T(x;\, 0) + T(0;\, y) = xT(1;\, 0) + yT(0;\, 1)$.
Zo is dus $T(2;\, 3) = 2T(1;\, 0) + 3T(0;\, 1)$.

Als $T = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ dan zal $(1;\, 0) \rightarrow (a;\, c)$ en $(0;\, 1) \rightarrow (b;\, d)$.

De transformatie is dus i.h.a. door de beelden van twee verschillende punten, in het bijzonder door die van $(1;\, 0)$ en $(0;\, 1)$, volkomen bepaald.

B.v. Stel $(2;\, 3) \rightarrow (14;\, 5)$ en $(3;\, 2) \rightarrow (11;\, 5)$,

dan geldt: $\begin{cases} 2T(1;\, 0) + 3T(0;\, 1) = (14;\, 5) \\ 3T(1;\, 0) + 2T(0;\, 1) = (11;\, 5). \end{cases}$

$$\Delta_T T(1;\, 0) = \begin{vmatrix}(14;\, 5) & 3\\(11;\, 5) & 2\end{vmatrix} \text{ of}$$
$$\Delta_T T(1;\, 0) = (28;\, 10) - (33;\, 15) = (-5;\, -5)$$

$\Delta_T = -5$ dus $T(1;\, 0) = (1;\, 1)$ en evenzo vindt men:
$T(0;\, 1) = (4;\, 1)$ zodat

$$T = \begin{pmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

Onderzoeken we deze transformatie nader dan vinden we:

$$(0;\, 0) \xrightarrow{T} (0;\, 0);\ \text{de } X\text{-as} \xrightarrow{T} y = x,\ \text{de } Y\text{-as} \xrightarrow{T} y = \tfrac{1}{4}x;$$
$$y = 3 \xrightarrow{T} x - y = 9;\quad y = q \xrightarrow{T} x - y = 3q.$$

---

[1]) Als men een matrix spiegelt t.o.v. de hoofddiagonaal ontstaat i.h.a. een nieuwe matrix, die men de *getransformeerde* van de eerste noemt: T^t.

$$y = mx \xrightarrow{T} y = \frac{1+m}{1+4m} \cdot x$$

zodat gelijkgerichte lijnen door de transformatie overgaan in gelijkgerichte lijnen. Zijn er lijnen, die in zichzelf overgaan?
Dan moet

$$m = \frac{1+m}{1+4m} \rightarrow m = \tfrac{1}{2} \text{ of } m = -\tfrac{1}{2}$$

Alle vectoren, die deze lijnen als drager hebben, houden dezelfde drager na de transformatie. Men noemt dit de *eigenvectoren* van de transformatie.

Zo zal

$$(4;\, 2) \xrightarrow{T} (12;\, 6) = 3(4;\, 2)$$
$$(2a;\, a) \xrightarrow{T} 3(2a;\, a).$$

Men noemt 3 de *eigenwaarde* van de vectoren $(2a;\, a)$.
Zo geldt $(-2a;\, a) \xrightarrow{T} -1(-2a;\, a)$ zodat -1 de eigenwaarde van de vectoren $(-2a;\, a)$ is.

$$y = mx + q \xrightarrow{T} x(m+1) - y(4m+1) = 3q.$$

Men kan de eigenvectoren met de bijbehorende eigenwaarden, iets algemener ook a.v. afleiden.
Zijn er punten (vectoren) $(x;\, y)$ die door de transformatie overgaan in $(kx;\, ky)$? $x \neq 0$, $y \neq 0$.
Dan moet:

$$\begin{cases} kx = x + 4y \\ ky = x + y \end{cases} \quad \text{dus} \quad \begin{cases} (1-k)x + 4y = 0 \\ x + (1-k)y = 0 \end{cases}$$

Dit stelsel laat alleen oplossingen toe die *niet* $(0;\, 0)$ zijn als

$$\begin{vmatrix} 1-k & 4 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \rightarrow k = 3 \quad \text{of} \quad k = -1$$

$k = 3$ geeft: $\quad 3x = x + 4y \rightarrow y = \tfrac{1}{2}x$
$k = -1$ geeft: $\quad -x = x + 4y \rightarrow y = -\tfrac{1}{2}x.$

Indien dus $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan geeft: $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$ de eigenwaarden, als ze er zijn.
Bepaal de eigenwaarden van:

$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ met de bijbehorende eigenvectoren.

Nu zijn de dragers van de eigenvectoren uitermate geschikt om tijdens de transformatie als nieuwe assen op te treden. Neemt men in ons geval de lijnen: $y = \frac{1}{2}x$ en $y = -\frac{1}{2}x$ en nog een lijn l, die de eerste twee lijnen snijdt, dan kan men het beeld van l vinden, door deze beide snijpunten t.o.v. de nieuwe assen te vermenigvuldigen met 3 resp. -1. De transformatie-matrix wordt dan teruggebracht tot de eenvoudige vorm:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Men noemt een dergelijke matrix, met alleen nullen buiten de hoofddiagonaal een *diagonaal-matrix*. (zie fig. 1 en 2).

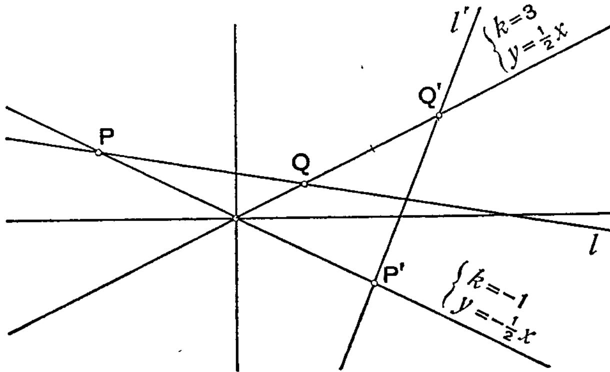


fig. 1.

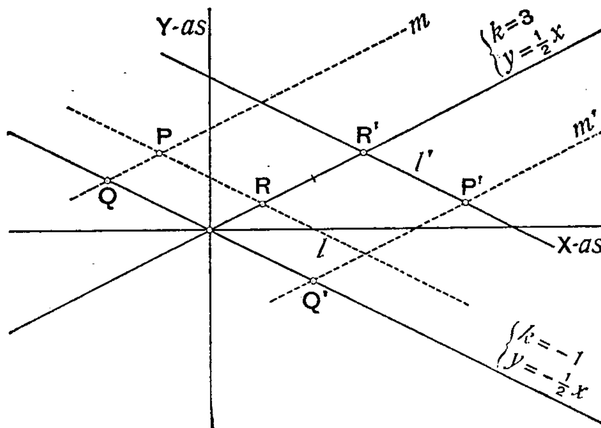


fig. 2.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ is een spiegeling t.o.v. de X-as.
Wat zijn de eigenvectoren?

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ is een spiegeling t.o.v. $y = x$.
$y = x$ en $y = -x$ zijn de dragers van de eigenvectoren, met eigenwaarde 1.

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ is een rotatie over 90° in positieve zin.
geen eigenvectoren.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ is een spiegeling t.o.v. (0, 0).
Wat zijn eigenvectoren?

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ is een rotatie, $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ een rotatie en uitrekking.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Alle lijnen evenwijdig met de X-as blijven na de transformatie evenwijdig met de X-as. De punten erop verschuiven naar rechts (resp. naar links). Alleen de X-as is eigenvector (schaar).

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ rotatie over 45°, vermenigvuldiging met $\sqrt{2}$, geen eigenvectoren.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ eigenwaarden $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$
eigenvectoren langs:

$$y = (\sqrt{2} - 1)x \text{ resp. } y = -(1 + \sqrt{2})x.$$

Nemen we tenslotte nog een singuliere transformatie.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \Delta = 0$$

$$\begin{cases} \bar{x} = 2x + y \\ \bar{y} = 2x + y \end{cases} \text{dus } \bar{x} = \bar{y}.$$

Het platte vlak wordt dus afgebeeld op de rechte

$$y = x.$$

Alle punten van $2x + y = 4$ hebben één beeld; (4; 4).
Alle punten van $2x + y = 0$ hebben één beeld: (0; 0).
De verzameling van alle punten, die (0; 0) tot beeld hebben noemt men de *kern* van de transformatie.

Als dus:

$$T(V) = (0;0) \text{ dan is } V = T^{-1}(0;0) \text{ en is } V \text{ de kern.}$$

Ga na: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ projectie op de X-as.

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ projectie op de Y-as en $\frac{\pi}{2}$ rechtsom.

$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ projectie op de X-as en $\frac{\pi}{2}$ linksom.

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ projectie op de Y-as.

$$BC = A;\ CB = D,\ A^2 = A,\ B^2 = C^2 = O,\ D^2 = D.$$

JOHN NAPIER

Op kasteel Merchiston bij Edinburg, dat hij als landheer bewoonde en waar hij in 1550 geboren was, is op 4 april 1617, 350 jaar geleden, John Napier gestorven. In de geschiedenis der wiskunde is hij bekend vanwege het invoeren der logaritmen. In 1614 verscheen te Edinburg zijn *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (beschrijving van de wonderlijke tabel van logaritmen). Hoe hij deze tabel samengesteld heeft is te vinden in zijn in 1619 — door zijn zoon Robert, en met hulp van Henry Briggs — uitgegeven *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (vervaardiging van de wonderlijke tabel van logaritmen). Het voert te ver deze *Constructio* hier uiteen te zetten. Napier plaatst naast elkaar een stijgende rekenkundige rij en een dalende meetkundige rij. Uit deze rijen kunnen wij berekenen wat het grondtal van de aldus gegeven logaritmen is. We vinden dan $(1-10^{-7})^{10^7}$. Omdat $\lim\limits_{x \to 0} (1-x)^{1/x} = e^{-1}$ mogen we zeggen, dat het grondtal ongeveer gelijk is aan e^{-1}. De natuurlijke logaritmen met grondtal e zijn pas later ingevoerd; dat deze ook wel Neperiaanse logaritmen genoemd worden, is een begrijpelijk eerbetoon.

Uit de *Constructio*, die in feite ouder is dan de *Descriptio*, blijkt, dat Napier zijn logaritmen aanvankelijk „numeri artificiales" (kunstmatige getallen) noemde. Later koos hij de naam logaritme; deze is samengesteld uit „logos" (verhouding) en „arithmos" (getal) en duidt op de belangrijke eigenschap, die als propositie 1 in de *Descriptio* voorkomt: „De logaritmen van getallen of hoeveelheden met gelijke verhouding hebben gelijke verschillen", dus als

$a/b = c/d$ dan is $\log a - \log b = \log c - \log d$.

Henry Briggs (1561—1631), tot 1619 hoogleraar te Londen en daarna te Oxford was enthousiast over Napier's tabel. Hij reisde in de zomers van 1615 en 1616 naar Schotland en besprak met Napier de mogelijkheid een nieuwe tabel samen te stellen, vastgelegd door de eisen $\log 1 = 0$ en $\log 10 = 1$. De fundamentele eerste eis is van Napier afkomstig, de voor praktische berekeningen in het decimale stelsel zeer wenselijke tweede eis van Briggs. In hetzelfde jaar waarin Napier overleden is, nu dus ook 350 jaar geleden, publiceerde Briggs zijn eerste berekeningen, *Logarithmorum chilias prima* (eerste duizend logaritmen), met de logaritmen van de getallen 1 tot en met 1000, voor het grondtal 10 en met liefst 14 decimalen. Zeer terecht worden de logaritmen met 10 als grondtal dus ook wel Briggse logaritmen genoemd.

In 1624 publiceerde Briggs de logaritmen van de getallen 1 tot en met 20 000 en 90 000 tot en met 100 000 (14 decimalen). Hij wilde deze tabel nog voltooien maar al in 1627 verscheen te Gouda, samengesteld door Ezechiël De Decker en Adriaan Vlacq, een tabel met de logaritmen van de getallen 1 tot en met 100 000, echter met slechts 10 decimalen. Deze tabel, door de beide Gouwenaars uitgegeven als voltooiing van die van Briggs, is eeuwenlang de bron voor andere tabellen geweest.

A. J. E. M. Smeur

BOEKBESPREKING

A. A. Blank, *Problems in Calculus and Analysis,* John Wiley & Sons Ltd, Londen, 1966, 264 blz., 23/—.

Deze vraagstukkenverzameling past bij het boek van Courant en John: *Introduction to Calculus and Analysis.* Het is verdeeld in negen hoofdstukken, de opgaven zijn in groepen bijeengebracht, opgaven over de fundamentele begrippen, over de techniek van de infinitesimaalrekening, numerieke oplossingsmethoden, sommen en produkten, trigonometrische rijen en differentiaalvergelijkingen. Bij elke groep is een paragraaf aanwijzingen.

Burgers

Papy, *Moderne wiskunde,* eerste deel, Meulenhoff, Amsterdam 1966, 468 blz., *f* 22,50.

Papy, *Mathématique Moderne,* tweede deel, M. Didier, Brussel, 1966, 442 blz.;

Papy, *Moderne wiskunde,* tweede deel, M. Didier, Brussel, 1967, 442 blz., prijs niet vermeld.

Voor een bespreking meen ik te kunnen verwijzen naar de artikelen van de heer Vredenduin 41e jaargang, deel V, blz. 131 en 42e jaargang, deel III, blz. 90.

Burgers

G. F. D. Duff and D. Naylor, *Differential Equations of Applied Mathematics*; John Wiley and Sons Inc., New York/London/Sydney, 1966; 423 blz., 90 /—.

In dit boek komen naast de klassieke lineaire partiële differentiaalvergelijkingen uit de theoretische fysica de vergelijkingen uit de elektromagnetische veldtheorie en uit de quantummechanica aan de orde. Verrassend is de wijze, waarop de auteurs de vergelijkingen trachten op te lossen, en wel in de volgende opzichten:

1. De systematische manier, waarop de functies van Green en de distributies bij de oplossing van differentiaalvergelijkingen met gegeven rand- en beginvoorwaarden worden gebruikt.

2. De rol die de fysische intuïtie bij het zoeken naar oplossingen speelt. De methode van het scheiden van variabelen wordt herhaaldelijk toegepast en krijgt in hoofdstuk 6 een theoretische rechtvaardiging.

3. De aandacht, die aan de betekenis van de algemene theorie van eigenwaarden en eigenfuncties voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen wordt besteed.

In het boek, dat naar aanleiding van colleges over differentiaalvergelijkingen is ontstaan, wordt een groot aantal onderwerpen aan de orde gesteld. De schrijvers ontwikkelen een prettige, vlotte stijl, waarin zowel aan mathematische problemen als aan fysische interpretaties aandacht wordt besteed. In verband met het onderwerp moet een aantal uiteenlopende gebieden van de wiskunde beheerst worden; de voornaamste theorieën, die toegepast worden, worden steeds tevoren in herinnering gebracht. Zo vinden de theorie van de lineaire ruimten, de theorie der distributies (vrij uitvoerig), de fourier-reeksen, de beginselen van de functietheorie, de fourier- en laplace-transformaties en andere onderwerpen een plaats in het boek. Deze opsomming moge voldoende zijn om te illustreren over welke hulpmiddelen de onderzoeker van partiële differentiaalvergelijkingen dient te beschikken. Hoewel de auteurs bij voorkeur analytische oplossingsmethoden zoeken, besteden zij ook aandacht aan het benaderen van differentiaalvergelijkingen door differentievergelijkingen, met hun numerieke oplossingsmethoden.

Het is ondoenlijk om alle goede kwaliteiten van dit boek te vermelden. Daarom wordt hier met twee opmerkingen volstaan. De waarde van het boek wordt stellig verhoogd door de grote hoeveelheid opgaven, die als oefenmateriaal tot beter begrip van de tekst zijn opgenomen. In de tweede plaats moet de heldere inleiding in de axiomatische opbouw van de quantummechanica genoemd worden, die op voortreffelijke wijze illustreert hoe vruchtdragend de combinatie van mathematisch en fysisch denken is.

Geen boek zonder schoonheidsfoutjes. Hier en daar springen de auteurs slordig om met het nul-element door de lezer te laten uitmaken of het een scalar dan wel een vector is. Op blz. 30 is de afleiding van de vergelijkingen van Lagrange uit het variatiebeginsel niet correct.

Voor docenten, die hun inzicht willen verdiepen in het samenspel tussen wiskunde en theoretische fysica, is dit een kostelijk boek.

W. J. Claas

R. G. Bartle, *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, New York-London, 1966, X+129 bl., 53 s.

Volgens het voorwoord is dit boekje bedoeld om aan lezers met een vooralsnog bescheiden wiskundige kennis (elementaire theorie van de reële analyse en enige vertrouwheid met ε, δ-redeneringen) snel de hoofdzaken uit de moderne integratietheorie bij te brengen (Stieltjes-Lebesgue integratie). Na een zeer beknopt gehouden inleiding in de maattheorie wordt het integraalbegrip ontwikkeld, uit-

gaande van de integraal van een trapfunctie. Het eerste gedeelte van het boek culmineert in de bespreking van de L_p-ruimten (Hfdst. 6) en van de stellingen, die gaan over het nemen van een limiet „onder het integraalteken", waartoe ook de stellingen over differentiatie onder het integraalteken behoren (Hfdst. 7). In de daarop volgende hoofdstukken komen nog de stellingen van Radon-Nikodym en van Fubini (herleiding van meervoudige integralen tot herhaalde integralen) aan de orde.

De stijl is helder en levendig; de beknoptheid wordt ten dele bereikt door stukken theorie in de vraagstukken te stoppen. Het boek eindigt met een lijstje van verdere lectuur over integratietheorie en met een alfabetische woordenlijst. Er worden geen toepassingen (in de waarschijnlijkheidsrekening, ergodentheorie, de theorie van de reeksen van Fourier of in de functionaalanalyse in het algemeen) genoemd.

Een uitstekend boek voor lezers, die zich (voorlopig) tevreden willen stellen met de beperkte doelstelling. A. C. Zaanen

Th. S. Sunko and M. D. Eulenberg, *Arithmetic, a college approach*; 225 blz.; geb. 40/—, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1966.

De auteurs hebben hun boek bestemd voor een uitgebreide lezersschare; ze hebben het niet alleen voor de „college-students" die in de titel worden genoemd, geschreven, maar ook voor mensen in de praktijk van handel en industrie die tekorten op rekengebied hebben aan te vullen. Deze arithmetic is echter niet een „rekenboek" geworden, dat met enige Nederlandse uitgave vergelijkbaar zou zijn. Nergens staat de dril op de voorgrond, steeds is het om het bijbrengen van inzicht begonnen. Zelf merken de auteurs op: „What is required in a satisfactory book is a careful treatment of the fundamental processes from a modern viewpoint and adequate, well-graded exercises to promote understanding and mastery of the principles involved". In hun streven zijn de auteurs m.i. uitstekend geslaagd.

Ze hebben hun doel trachten te bereiken door uit te gaan van verzamelingstheoretische beschouwingen, successievelijk wordt het begrip natuurlijk getal uitgebreid tot dat van reële getal. Wat deze uitbreiding betreft, zijn de auteurs er op uit de nieuwe getallensoorten te „ontdekken" in plaats van ze te „definiëren". Het gevolg is o.a. dat ze schrijven:

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

zonder dat nog is komen vast te staan, welk het getal is, dat met het symbool $\sqrt{2}$ wordt bedoeld.

Behoudens een bezwaar als dit is echter de tekst met grote zorg geschreven. Ik beveel kennismaking met dit leerboek van harte aan bij allen, die bij de onderwijzersopleiding zijn betrokken, terwijl het boek m.i. ook aan menig jong leraar bij het V.H.M.O. goede diensten zal kunnen bewijzen. Joh. H. Wansink

Ivan Niven and Herbert S. Zuckerman, *An introduction to the theory of numbers*, second edition, 280 p.; geb. 60/—; John Wiley & Sons, New York-London-Sydney; 1966.

Deze helder geschreven inleiding tot de getaltheorie begint met enige eenvoudige onderwerpen over deelbaarheid die ons uit de onderwijzersopleiding van weleer bekend zijn, inclusief theorema's van Fermat en Euler, en geeft daarna een compact hoofdstuk over congruenties die in de opleiding voor de akte wiskunde K 1 vele jaren lang het gehele vak rekenkunde plachten te representeren. Geleidelijk aan worden moeilijker onderwerpen besproken. Na een behandeling van enige

diophantische vergelijkingen komen farey-rijen en algebraïsche getallenlichamen aan de orde. Aan het slot vindt men de zwaarste hoofdstukken, over de verdeling der priemgetallen, over de verdelingsfunctie en over de dichtheid van rijen gehele getallen.

Voor ieder die belangstelt in de getaltheorie, een der oudste zo niet het oudste hoofdstuk van de wiskunde als wetenschap, is dit boek, royaal verzorgd met alle goede eigenschappen waardoor de uitgaven van de firma Wiley & Sons worden gekenmerkt, een waardevol bezit. Joh. H. Wansink

M. F. Willerding, *Elementary Mathematics*, John Wiley and Sons, New York-London, 1966, 298 blz., 53/—.

,,This textbook is a result of five years of experimenting with mathematics training for teachers of elementary school mathematics and in-service classes for elementary school teachers.''

Het is uiterst eenvoudig van opzet en start natuurlijk met de bekende begrippen uit de leer van de verzamelingen in de trant van: A = {John, Joe, Alice} en dan een één-ééncorrespondentie A = {Ruth, Doris, Nellie}
B = {Atlas, Gai, Suzie}.

Natuurlijk venn-diagrammen, operaties en combinaties van operaties. Een tastbaar Cartesiaans produkt van twee verzamelingen is zeker in het volgende schema te vinden:

roast beef	(B)	(B, p)	(B, c)	(B, a)	(B, b)
pork chops	(C)	(C, p)	(C, c)	(C, a)	(C, b)
		potatoes	corn	asparagus	beets
		(p)	(c)	(a)	(b)

In hoofdstuk 2 komt de propositionele logica aan bod, met waarheidstafels, relaties, equivalentie relaties. Dan worden de ,,whole Numbers'' (0, 1, 2, ...) besproken met cardinaalgetallen. Ook hier zijn de elementen van de verzamelingen waarmee ,,geteld'' wordt zeer ,,tastbare'' zaken. Getalstelsels ontbreken niet, evenmin een intuïtieve inleiding in de stereometrie. Tenslotte komt men tot uitbreiding van de getallenverzamelingen. Aan de irrationale getallen zijn 15 regels gewijd.

Het zal duidelijk zijn, dat geen wiskundige voorkennis nodig is.

Mogelijk kan een docent van de lagere school er toch wel iets in vinden, dat zijn inzicht in deze materie wat verbreedt. Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

173. Men kent waarschijnlijk het volgende probleem. Drie families wonen in drie villa's. Elk van deze villa's moet voorzien worden van gas, water en elektriciteit. Daartoe moeten vanuit drie centrales, die resp. gas, water en elektriciteit leveren, drie buizen gelegd worden naar elk van de drie villa's. Deze buizen moeten in één vlak liggen en mogen elkaar niet snijden. Liefhebbers van deze rubriek hebben hun neus al eens gestoten en weten, dat dit in het platte vlak en dus ook op de bol niet mogelijk is. De drie families hebben hun neus overeenkomstig gestoten en zijn daarom naar de ring van Saturnus verhuisd. Hadden ze gelijk?

De heer Kootstra, die ik dit probleem voorlegde, deelde mij mede, dat de ring van Saturnus al bewoond was. Er woonde namelijk al één familie en deze had

behalve gas, water en elektriciteit, ook nog telefoon. Te verwachten is, dat de immigranten ook telefoon willen hebben. Is er nu nog aan alle eisen te voldoen?

174. Verschillende puzzels gaan over vraagstellingen aan een van twee mensen, waarvan de een altijd liegt en de ander altijd de waarheid spreekt. Een voorbeeld daarvan was nr. 167. Prof. Freudenthal merkt naar aanleiding hiervan op, dat dit soort opgaven onnodig gecompliceerd gesteld en onnodig gecompliceerd opgelost wordt doorgaans.

Voldoende is één zegsman. Van deze zegsman weet men, dat hij hetzij de eigenschap heeft altijd de waarheid te spreken, hetzij de eigenschap heeft altijd te liegen. Men vraagt hem nu:

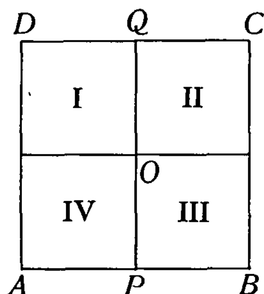
als ik je vraag of p waar is, wat antwoord je dan?

Is zijn antwoord ,,ja'', dan is p waar, en is zijn antwoord ,,neen'', dan is p onwaar, ongeacht het feit of hij de waarheidspreker dan wel de leugenaar is.

OPLOSSINGEN

171. Gevraagd wordt op hoeveel principieel verschillende manieren men op een vierkant bord met $(2n)^2$ velden er twee kan kiezen.

We verdelen het bord in vier delen, zoals in onderstaande figuur is weergegeven.



We behoeven nu alleen maar de volgende drie gevallen te onderzoeken:

a. gekozen worden een veld in I en een in II,
b. gekozen worden een veld in I en een in III,
c. gekozen worden twee velden in I.

Geval a. De twee velden kunnen op $n^2 . n^2$ manieren gekozen worden. Deze keuzen leiden tot:

n^2 paren symmetrisch gelegen t.o.v. de lijn PQ,
$n^4 - n^2$ paren, die niet symmetrisch liggen t.o.v. PQ.

We vinden zo

$n^2 + \frac{1}{2}(n^4 - n^2)$ verschillende manieren.

Geval b. De velden kunnen weer op n^4 manieren gekozen worden. Deze keuzen leveren:

$n^2 - n$ paren, die symmetrisch liggen t.o.v. AC en niet op BD liggen,
$n^2 - n$ paren, die symmetrisch t.o.v. O en niet op BD liggen,
$n^2 - n$ paren, die op BD en niet symmetrisch t.o.v. O liggen,
n paren, die op BD en symmetrisch t.o.v. O liggen,
$n^4 - 3n^2 + 2n$ paren, die geen van deze bijzonderheden hebben.

We vinden zo

$\frac{1}{2}(n^2 - n) + \frac{1}{2}(n^2 - n) + \frac{1}{2}(n^2 - n) + n + \frac{1}{4}(n^4 - 3n^2 + 2n)$ verschillende manieren.

Geval c. We kunnen de paren velden op $\frac{1}{2}n^2\ (n^2 - 1)$ manieren kiezen. Deze keuzen leveren:

$\frac{1}{2}(n^2 - n)$ paren, die symmetrisch t.o.v. BD en niet op BD liggen
$\frac{1}{2}(n^2 - n)$ paren, die op BD liggen,
$\frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{2}n^2 + n$ paren, die niet symmetrisch t.o.v. BD liggen.

We vinden zo
$\frac{1}{2}(n^2 - n) + \frac{1}{2}(n^2 - n) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{2}n^2 + n)$ verschillende manieren.
In totaal vinden we dus:

$n^4 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ verschillende manieren.

Opmerking. Merkwaardig is, dat het probleem op hoeveel verschillende manieren drie velden gekozen kunnen worden, gemakkelijker is dan het probleem met twee velden.

172. Hoeveel kinderen staan er in de kring, als het kind dat aftelt en bij zichzelf begint, overblijft? Het aftel versje is olleke, bolleke, knol.

We onderscheiden drie gevallen:

a. Het aantal kinderen is $3k$. Na een keer rondtellen zijn er dan $2k$ over. De afteller moet deze $2k$ kinderen verder aftellen en daarbij weer bij zichzelf beginnen.

b. Het aantal kinderen is $3k + 1$. Onderstel dat er b.v. 10 kinderen zijn. Nummer deze in volgorde van aftellen 1, 2, . . ., 10. Dan vallen achtereenvolgens af de nummers 3, 6, 9, 2. Er blijven dan 6 kinderen over. Deze moeten afgeteld worden, waarbij nu begonnen moet worden met het kind, dat eerst nr. 4 had. Dit kind staat in de overgebleven rij van 6 op de tweede plaats. Meer algemeen zien we zo, dat het geval $3k + 1$ gereduceerd kan worden tot $2k$ en beginnen af te tellen bij nr. 2.

c. Het aantal kinderen is $3k + 2$. Dan valt de afteller na de eerste ronde af. Dit geval is dus strijdig met het gegeven.

We hebben dus de volgende reductie gevonden:

$3k$ geeft $2k$ en beginnen bij nr. 1,
$3k + 1$ geeft $2k$ en beginnen bij nr. 2,
$3k + 2$ geeft een strijdigheid.

Op dezelfde manier vinden we de volgende reductiemogelijkheden:

$3k$ en beginnen bij nr. 2 geeft een strijdigheid,
$3k + 1$ en beginnen bij nr. 2 geeft $2k + 1$ en beginnen bij nr. 1,
$3k + 2$ en beginnen bij nr. 2 geeft $2k + 1$ en beginnen bij nr. 2.

We beginnen nu het probleem van de andere kant af aan te pakken. Er zijn er ten slotte 2 over. Dan is aan de eis alleen voldaan, als bij nr. 2 met tellen begonnen moet worden.

Bovenstaande reducties stellen ons nu in staat na te gaan, waaruit deze gunstige eindtoestand ontstaan kan zijn. We zien dan:

2 en beginnen bij nr. 2 is ontstaan uit 4 en beginnen bij nr. 1,
dit is ontstaan uit 6 en beginnen bij nr. 1,
dit uit 9 en beginnen bij nr. 1, enz.

Zo vinden we de volgende serie, waarin de aantallen, waarbij bij nr. 2 begonnen moet worden, tussen haakjes geplaatst zijn:

(2), 4, 6, 9, (13), (20), 31, (46), 70, 105, ...

De getallen, die niet tussen haakjes staan, zijn dus de mogelijke aantallen kinderen, die aanvankelijk in de kring stonden.